Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 3 (1968) 153—158.

НЕСМЕЩЕННЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРА КОМПЛЕКСНОГО СТАЦИОНАРНОГО ГАУССОВСКОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

M. ARATÓ

Рассматривается комплексный стационарный гауссовский марковский процесс $\zeta(t)$ с математическим ожиданием $\mathsf{M}\zeta(t)=0$ и функцией ковариации

$$\mathsf{M}\zeta(t+s)\overline{\zeta(t)} = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda|s|-i\omega s}$$

(где ω известна). В данной заметке рассматриваются оценки параметра „затухания" λ с помощью статистик

$$s_2^1 = \frac{1}{2}[|\zeta(0)|^2+|\zeta(T)|^2 \quad \text{и} \quad s_2^2 = \frac{1}{T}\int\limits_0^T |\xi(t)|^2 dt$$

отдельно. Как легко показать, ни s_2^1 ни s_2^2 не являются допустимыми[1] оценками $1/\lambda$ (см. статью [4], где это доказывается для одномерного процесса), тем не менее эти оценки представляют интерес. Кроме того рассматривается приближение характеристической функции оценки максимального правдоподобия и точность приближения с функцией нормального распределения.

Напомним совместную характеристическую функцию случайных величин s_1^2 и s_2^2 (см. [2] или [3]).

$$\varphi_{s_1^2,\, Ts_2^2}(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{4\lambda(\lambda^2-2i\alpha_2)^{\frac{1}{2}} e^{T\lambda - T\sqrt{\lambda^2-2i\alpha_2}}}{\left(\lambda - i\alpha_1 + \sqrt{\lambda^2-2i\alpha_2}\right)^2 - \left(\lambda - i\alpha_1 - \sqrt{\lambda^2-2i\alpha_2}\right)^2 e^{-2T\sqrt{\lambda^2-2i\alpha_2}}}. \tag{1}$$

В дальнейшем предполагается, что $T=1$.

1. Оценка s_1^2, для значений $\lambda \ll 1$

Из данных предположений легко вывести, что $Ms_1^2=1/\lambda$, т. е. s_1^2 можно использовать для оценки $1/\lambda$. С другой стороны, из (1) следует для характеристической функции λs_1^2

$$f_{\lambda s_1^2}(\alpha) = \frac{1}{1-i\alpha-\alpha^2 \dfrac{1-e^{-2\lambda}}{4}}, \tag{1.1}$$

[1] Несмещенная оценка ξ параметра $f(\lambda)(=\mathsf{M}_\lambda\xi)$ называется допустимой на компакте Λ_0, если нет такой оценки нуля χ, $\mathsf{M}_\lambda\chi=0$ (при $\lambda\in\Lambda_0$), что $\mathsf{D}_\lambda^2(\xi+\chi)\leqq\mathsf{D}_\lambda^2(\xi)$ при всех $\lambda\in\Lambda_0$, причем для одного λ имеет место знак неравенства (в противном случае ξ называется недопустимой).

и отсюда получаем

$$\mathsf{P}_\lambda\left\{\frac{1}{s_1^2}<\lambda\cdot y\right\}=\mathsf{P}_\lambda\left\{\lambda s_1^2>\frac{1}{y}\right\}=\frac{e^\lambda-e^{-\lambda}}{2(1-e^{-\lambda})}e^{-2\frac{1-e^{-\lambda}}{1-e^{-2\lambda}}\cdot\frac{1}{y}}-\frac{e^\lambda-e^{-\lambda}}{2(1+e^{-\lambda})}e^{-2\frac{1+e^{-\lambda}}{1+e^{-2\lambda}}\cdot\frac{1}{y}}. \tag{1.2}$$

Так как статистика s_1^2 легко вычисляется (и при $\lambda\to 0$ получается χ^2 распределение с двумя степенями свободы), представляется интересным показать, при каких λ можно вместо оценки максимального правдоподобия $\hat\lambda$, взять s_1^2. В следующей таблице 1. даются значения y при разных p $(=P\{$„оценка" $<\lambda\cdot y\})$, и λ, для оценки максимального правдоподобия и оценки $1/s_1^2$. Легко убедиться, что при $\lambda<0\cdot 1$ оценки $\hat\lambda$ и $1/s_1^2$ являются приближенно эквивалентными.

Таблица 1

	$\lambda \backslash p$	0,1	0,05	0,025	0,01	0,001	0,9	0,95	0,975	0,99	0,999
$\hat\lambda$	0	0,951	19,52	39,60	99,9	1000	0,4352	0,3351	0,2620	0,2165	0,1460
	0,1	6,79	10,92	16,20	25,0	53,3	0,443	0,343	0,271	0,225	0,154
s_1^2		6,82	11,15	17,30	29,5	101,4	0,446	0,345	0,281	0,225	0,151
$\hat\lambda$	0,5	4,08	5,59	7,24	9,58	16,36	0,477	0,378	0,308	0,257	0,185
s_1^2		4,52	6,86	10,17	16,72	55,2	0,482	0,380	0,314	0,254	0,173

2. Оценка s_2^2, для значения $\lambda\gg 1$

При наших предположениях $Ms_2^2=1/\lambda$, т. е. s_2^2 является несмещенной оценкой $1/\lambda$. Статистику s_2^2 для больших значений λ $(\lambda\gg 1)$ легче использовать, чем оценку максимального правдоподобия. Характеристическая функция имеет вид (см. (1)):

$$f_{s_2^2}(\alpha)=\frac{4\lambda(\lambda^2-2i\alpha)^{\frac{1}{2}}e^{\lambda-\sqrt{\lambda^2-2i\alpha}}}{\left(\lambda+\sqrt{\lambda^2-2i\alpha}\right)^2-\left(\lambda-\sqrt{\lambda^2-2i\alpha}\right)^2e^{-2\sqrt{\lambda^2-2i\alpha}}}. \tag{2.1}$$

Для определения значений y, при которых имеет место соотношение $\mathsf{P}\{\lambda^2 s_2^2<\lambda\cdot y\}=p$ (где число p данное). Мы использовали вычислительную машину УРАЛ-2. Определив значение интеграла

$$\frac{2e^y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{r}\,e^{\lambda-\lambda\sqrt{r}\cos\varphi/2}\{\alpha_1[\sigma\cos\gamma+s\sin\gamma]+\alpha_2[\sigma\sin\gamma-s\cos\gamma]\}}{(\sigma^2+s^2)(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}\,ds \tag{2.2}$$

при разных y, и последовательным приближением по y можно найти искомое

значение. Функцию распределения случайной величины s_2^2 не удалось найти в явном виде. Величины в интеграле (2. 2) имеют следующие значения:

$$\alpha_1=A_1^2-A_2^2+\{[A_2^2-B_1^2]\cos\left(2\lambda\sqrt{r}\sin\varphi/2\right)+2B_1A_2\sin\left(2\lambda\sqrt{r}\sin\varphi/2\right)\}e^{-2\lambda\sqrt{r}\cos\varphi/2},$$

$$\alpha_2=2A_1A_2+\{2B_1A_2\cos\left(2\lambda\sqrt{r}\sin\varphi/2\right)+(B_1^2-A_2^2)\sin\left(2\lambda\sqrt{r}\sin\varphi/2\right)\}e^{-2\lambda\sqrt{r}\cos\varphi/2},$$

$$\gamma=\lambda ys+\varphi/2-\lambda\sqrt{r}\sin\varphi/2,\quad A_1=1+\sqrt{r}\cos\varphi/2,\quad A_2=\sqrt{r}\sin\varphi/2,$$

$$B_1=\left(1-\sqrt{r}\cos\varphi/2\right),$$

$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{2s}{1+2\sigma},\qquad r^2=4s^2+(1+2\sigma)^2,\qquad \sigma=1/\lambda.$$

Определение одного интеграла при данном y требует 10—15 минут для значений $\lambda\sim 10$, и 5 минут для значений $\lambda\sim 100$ (при точности 10^{-4}). Вычисление интеграла (2. 2), если $\lambda<10$, с данным методом происходит очень медленно. В нижеследующей таблице даются значения y при разных p и λ для $1/s_2^2$, максимального правдоподобия $(\hat\lambda)$ и для нормального приближения (н. п.)

Таблица 2

	$\lambda \backslash p$	0,1	0,05	0,025	0,01	0,90	0,95	0,975	0,99
Н. п.		1,1281	1,1645	1,1960	1,2326	0,8719	0,8355	0,8040	0,7674
$\hat\lambda$	100	1,1413	1,1832	1,2205	1,2654	0,8847	0,8533	0,8269	0,7972
s_2^2		1,1305	1,1720	1,2096	1,253	0,8760	0,8449	0,8188	0,7895
Н. п.		1,403	1,516	1,620	1,734	0,597	0,484	0,380	0,266
$\hat\lambda$	10	1,530	1,701	1,867	2,073	0,714	0,641	0,588	0,527
s_2^2		1,414	1,558	1,713	2,03	0,648	0,562	0,534	0,49
		—	—	—	—	—	—	—	—
$\hat\lambda$	5	1,809	2,090	2,354	2,710	0,647	0,562	0,497	0,432
s_2^2						0,535	0,47		

Интересно заметить, что при больших значениях λ оценка $1/s_2^2$ является более „симметричной", чем оценка максимального правдоподобия. Даже при $\lambda\sim 10$ доверительные границы более „короткие" по оценке $1/s_2^2$, чем по оценке максимального правдоподобия.

3. Оценки максимального правдоподобия, приближения для значений $\lambda \gg 1$

а) Оценка максимального правдоподобия

$$\hat{\lambda} = \frac{-(s_1^2 - T) + \sqrt{(s_1^2 - T)^2 + 4Ts_2^2}}{2Ts_2^2}$$

зависит от двух статистик s_1^2 и s_2^2. Для определения функции распределения при данном λ, $\mathsf{P}_\lambda\{\hat{\lambda} < \lambda y\}$, нам достаточно вычислить функцию распределения случайной величины $\zeta_y = \lambda y s_1^2 + \lambda^2 y^2 s_2^2$. Преобразование Лапласа функции распределения ζ_y имеет вид

$$F^*(p) = \frac{4(1+2y^2p)^{\frac{1}{2}} e^{\lambda - \lambda\sqrt{1+2y^2p}}}{p\left\{\left[1+yp+\sqrt{1+2y^2p}\right]^2 - \left[1+y\,p-\sqrt{1+2y^2p}\right]^2 e^{-2\lambda\sqrt{1+2y^2p}}\right\}}. \tag{3.1}$$

Возникает вопрос, нельзя ли пренебречь вторым членом в знаменателе, если $\lambda \gg 1$? Этот вопрос интересен потому, что преобразование Лапласа функции

$$\tilde{F}(p) = \frac{4(1+2y^2)^{\frac{1}{2}} e^{\lambda - \lambda\sqrt{1+2y^2p}}}{p\left[1+yp+\sqrt{1+2y^2p}\right]^2} \tag{3.2}$$

дается в явном виде (хотя использовать его для вычислений пока невозможно).

С помощью функции (3. 2) для определения y при данном $p (= \mathsf{P}\{\hat{\lambda} > \lambda \cdot y\})$ мы вычисляем интегралы

$$\frac{2e^{\sigma(\lambda y+1)}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{r}\, e^{\lambda(1-\sqrt{r}\cos\varphi/2)}\{[\sigma\cos\gamma + s\sin\gamma](A_1^2 - A_2^2) + 2A_1A_2[\sigma\sin\gamma - s\cos\gamma]\}}{(\sigma^2+s^2)[A_1^2+A_2^2]^2}\, ds \tag{3.3}$$

с достаточной точностью (10^{-4}), где

$$A_1 = \left(1 + y\sigma + \sqrt{r}\cos\varphi/2\right), \quad A_2 = \left(ys + \sqrt{r}\sin\varphi/2\right), \quad r^2 = (1+2y^2\sigma)^2 + (2y^2s)^2,$$

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{2y^2s}{1+2y^2\sigma}, \quad \gamma = \left\{(\lambda y+1)s + \varphi/2 - \lambda\sqrt{r}\sin\varphi/2\right\}, \quad \sigma = 1/\lambda$$

Любопытно заметить, что для $\lambda < 10$ в вычислении интеграла (3. 3) возникают трудности, в то же время в точных вычислениях такого явления не было (см. [3]).

Из таблицы 3 видно, что приближение (3. 2) является вполне удовлетворительным даже при $\lambda \sim 5$ (особенно при значениях $y > 1$).

б) Еще в статье [1] заметили, что для больших λ оценка $\hat{\lambda}$ имеет приближенно нормальное распределение.

$$\mathsf{P}\{\hat{\lambda} < y \cdot \lambda\} = \mathsf{P}\{\hat{\lambda} < \lambda + z\sqrt{\lambda}\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \tag{3.4}$$

Таблица 3

	$\lambda \setminus p$	0,1	0,05	0,025	0,01	0,001	0,9	0,95	0,975	0,99	0,999
$\hat{\lambda}$	100	1,1413	1,1832	1,2205	1,2654	1,3641	0,8847	0,8533	0,8269	0,7972	0,732
приб.		1,1413	1,1834	1,2211	1,2654	1,362	0,8853	0,8535	0,8273	0,797	0,732
$\hat{\lambda}$	10	1,527	1,701	1,867	2,073	2,575	0,714	0,641	0,588	0,527	0,422
приб.		1,527	1,700	1,867	2,073	2,579	0,714	0,641	0,590	0,527	0,422
$\hat{\lambda}$	5	1,809	2,090	2,354	2,710	3,583	0,647	0,562	0,497	0,432	0,319
приб.		1,81	2,1	2,4	2,	3,	0,648	0,561	0,49		
$\hat{\lambda}$	3	2,107	2,510	2,911	3,443	4,752	0,600	0,506	0,439	0,373	0,268
приб.		2,17					0,59	0,504			

и отсюда для y_p (при данном p) получается следующее соотношение

$$y_p = 1 + \frac{z_p}{\sqrt{\lambda}}$$

(в таблице 2 значения для нормального приближения по этой формуле даются). Так как нормальное приближение даже при $\lambda \sim 100$ не действует с достаточной точностью, можно предполагать, что y_p имеет вид

$$y_p = 1 + \frac{z_p}{\sqrt{\lambda}} + \frac{c_p}{\lambda}, \tag{3.5}$$

где c_p вычисляется по данным таблицы статьи [3].

В следующей таблице мы даем значения z_p и c_p при разных p.

Приближение (3. 5) для $\lambda > 50$ дает достаточную точность (три верных знака для y_p) и намного облегчает вычислительную работу.

Таблица 4

p	0,1	0,05	0,025	0,01	0,001	0,9	0,95	0,965	0,99	0,999
z_p	−1,2815	−1,6449	−1,9600	−2,3264	−3,0900	1,2815	1,6449	1,9600	2,3264	3,0900
c_p	1,30	1,78	2,29	2,98	4,13	1,31	1,87	2,46	3,29	5,51

БИБЛИОГРАФИЯ

[1] Арато, М., Колмогоров А. Н. и Синай, Я. Г. Об оценке параметров комплексного стационарного гауссовского марковского процесса, *Докл. Акад. Наук СССР* 146 (1962) 747—750.

[2] Arató M.: Folytonos állapotú Markov-folyamatok statisztikai vizsgálatáról, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **14** (1964) 317—330.

[3] Арато, M.: Вычисление доверительных границ для параметра „затухания" комплексного стационарного гауссовского марковского процесса, (в печати в журнале *Теор. Вероятност. и Применен*).

[4] Арато, M.: О подобных критериях и допустимых оценках стационарного гауссовского марковского процесса, *Studia Sci. Math. Hungar.* **3** (1968)

Вычислительный Центр Академии Наук Венгрии, Будапешт

(Поступила 21-ого марта 1967 г.)